Wahrscheinlichkeiten

August, 2013

Outline

Zufallsexperimente

Die möglichen Ergebnisse (*outcome*) i eines Zufallsexperimentes (oder Zufallsvorgangs) bestimmen den Wert einer Zufallsvariablen $x \in \Omega_{\mathcal{X}} = a_1, a_2, \ldots, a_I$ $\big($$x$ ist eine Funktion des Ergebnisses $i$$\big)$. Beispiele:

- Würfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ oder $\Omega = \{gerade, ungerade\}$
- gemessene Temperatur in K: $\Omega \in \mathbb{R}^+$
- Auswahl eines zufällige Zeichens aus einem Buch $\Omega = \{a, b, \ldots, z, -\}$

Wahrscheinlichkeiten

Jedem Ergebniswert a_i wird eine Wahrscheinlichkeit $P(x = a_i)$ (kurz p_i) zugeordnet. Dabei gilt:

- $0 \leq p_i \leq 1$
- $P(\Omega) = \sum_{a_i \in \Omega} p_i = 1$

Wahrscheinlichkeiten einer Untermenge

Wahrscheinlichkeit einer Untermenge T von $\Omega_{\mathcal{X}}$:

$$P(T) = \sum_{i \in T} P(i)$$

Beispiel: Wahrscheinlichkeiten von Vokalen V

- $V = \{\mathtt{a}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{o}, \mathtt{u}\}$
- $P(V) = 0.06 + 0.09 + 0.06 + 0.07 + 0.03 = 0.31$

(Multivariate Verteilungen)

Der Ausgang des Zufallsexperimentes kann auch auf ein geordnetes Paar x, y abbilden, mit

- mit
  - $x \in \Omega_X = \{a_1, \ldots, a_I\}$
  - $y \in \Omega_Y = \{b_1, \ldots, b_J\}$.
- $P(x, y)$ ist die multivariate Wahrscheinlichkeit (*Joint Probability*) von x und y.
- Kommas sind optional beim Schreiben von geordneten Paaren: $xy \Leftrightarrow x, y$.
- Die Zufallsvariablen x und y sind nicht notwendigerweise unabhängig.

Beispiel

Wurf eines Würfels mit $x \in \{gerade, ungerade\}$ und $y \in \{Primzahl, keinePrimzahl\}$:

- $P(gerade, primzahl) = 1/6$
- $P(ungerade, primzahl) = 2/6$
- $P(gerade, keinePrimzahl) = 2/6$
- $P(ungerade, keinePrimzahl) = 1/6$

Die Angabe aller Wahrscheinlichkeiten der möglichen Zustände bestimmt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (*distribution*).

Marginalisierung

Die Randverteilung (*Marginal Probability*) $P(x)$ ergibt sich aus der *Joint Probability* $P(x, y)$ durch Summation:

$$P(x = a_i) \equiv \sum_{y \in \Omega_Y} P(x = a_i, y).$$

Analog mit kürzerer Notation für die Randverteilung $P(y)$:

$$P(y) \equiv \sum_{x \in \Omega_X} P(x, y).$$

Beispiel

für den Wurf eines Würfels mit

- $P(gerade, primzahl) = 1/6$
- $P(ungerade, primzahl) = 2/6$
- $P(gerade, keinePrimzahl) = 2/6$
- $P(ungerade, keinePrimzahl) = 1/6$

$$P(primzahl) = P(gerade, primzahl) + P(ungerade, primzahl) = 1/2$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(x = a_i | y = b_j) \equiv \frac{P(x = a_i, y = b_j)}{P(y = b_j)}$$

- wenn $P(y = b_j) \neq 0$
- falls $P(y = b_j) = 0$ dann ist $P(x = a_i | y = b_j)$ undefiniert!

Beispiel

für den Wurf eines Würfels mit

- $P(gerade, primzahl) = 1/6$
- $P(ungerade, primzahl) = 2/6$
- $P(gerade, keinePrimzahl) = 2/6$
- $P(ungerade, keinePrimzahl) = 1/6$

$$P(primzahl|gerade) = \frac{1/6}{1/6 + 2/6} = 1/3$$

Produkt- und Summenregel

Produktregel

$$P(x, y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x).$$

Summenregel

$$P(x) = \sum_y P(x, y) = \sum_y P(x|y)P(y)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten - Satz von Bayes

aus Produktregel ergibt sich direkt:

Satz von Bayes

$$P(y|x) = \frac{P(x|y)P(y)}{P(x)} = \frac{P(x|y)P(y)}{\sum_{y'} P(x|y')P(y')}$$

Statistische Unabhängigkeit

Zwei Zufallsvariablen x und y sind statistisch unabhängig (*independent*), wenn und nur wenn

$$P(x, y) = P(x)P(y)$$

Notation: $x \perp y$

Wahrscheinlichkeitsdichte

Bei kontinuierlichen Variablen ist $p(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte (*probability density function, pdf*)

$$p(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

und der Wahrscheinlichkeit das x ins Intervall $[a, b]$ fällt:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x) dx$$

Erwartungswert

Der Erwartungswert für eine Funktion von $f(x)$ ist:

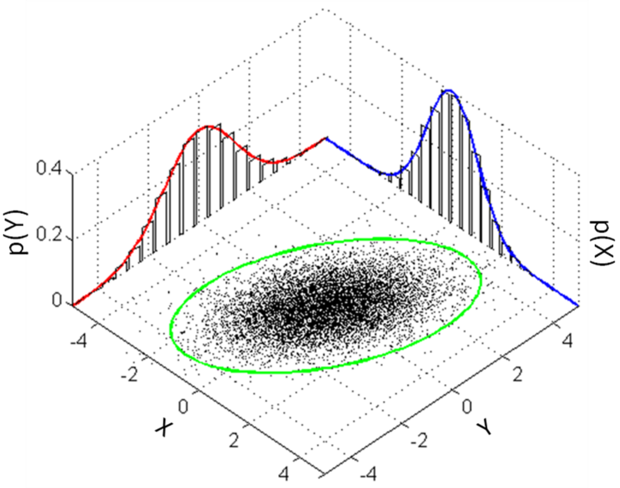
$$\mathbb{E}_{\mathcal{X}}[f(x)] = \int_{\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx = \int_{\mathcal{X}} f(x)dp(x)$$

Erwartungswert: Join Probabilty

Der Erwartungswert für eine Funktion von $f(x, y)$ ist:

$$\mathbb{E}_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}[f(x, y)] = \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Y}} f(x, y)p(x, y)dxdy = \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} f(x, y)dp(x, y)$$

Beispiel: Multivariate Verteilung



Literaturangabe

- [MacKay] David McKay: Information Theory, Inference, and Learning Algorithms, Cambridge University Press, 2003